Nesta prova, adotam-se as seguintes convenções:

- E^3 denotará o conjunto dos pontos no espaço tridimensional;
- V^3 denotará o conjunto dos vetores no espaço tridimensional;
- se $\vec{w}$ é um vetor não nulo e $\vec{u} \in V^3$, então a projeção ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{w}$ será denotada por $\text{proj}_{\vec{w}}\,\vec{u}$.

Q1. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e considere as afirmações sobre o sistema linear

$$\begin{cases} ax + bz = 2 \\ a^2x + a^2y + 4z = 4 \\ a^2y + 2z = b \end{cases}$$

nas incógnitas x, y, z:

I. Se $a = 0$, o sistema não tem solução, qualquer que seja $b \in \mathbb{R}$.
II. Se $ab = 2$, o sistema tem infinitas soluções.
III. Se $a \neq 0$ e $ab \neq 2$, o sistema tem uma única solução.

Está correto apenas o que se afirma em

(A) III.
(B) I.
(C) I e II.
(D) II.
(E) I e III.

Q2. Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ vetores de V^3, com $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 2$ e $\|\vec{w}\| = 1$ e tais que a medida do ângulo entre quaisquer dois desses vetores seja igual a $\frac{\pi}{3}$ radianos. Então, a projeção ortogonal de $\vec{u} + \vec{v} + 2\vec{w}$ sobre $\vec{u}$ é igual a

(A) $3\vec{u}$
(B) $\frac{5}{2}\vec{u}$
(C) $4\vec{u}$
(D) $2\vec{u}$

Q3. Seja $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ um conjunto linearmente independente em V^3 e considere a base $\mathcal{C} = \{\vec{v} - \vec{u},\ \vec{v} - \vec{w},\ \vec{u}\}$ de V^3. Se (a, b, c) são as coordenadas de $\vec{u} + 2\vec{v} + 3\vec{w}$ na base $\mathcal{C}$, então $a + b + c$ é igual a

(A) -3

(B) 8

(C) -1

(D) 2

(E) 0

Q4. Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V^3$ vetores não nulos com $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ linearmente independente. Está correto afirmar que

(A) se $\vec{w}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$, então $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é uma base ortogonal de V^3.

(B) o conjunto $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é linearmente independente.

(C) os vetores $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$ são ortogonais.

(D) se $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é uma base ortogonal de V^3, então $\text{proj}_{\vec{w}}(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{0}$.

(E) se $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é um conjunto linearmente independente, então o conjunto $\{\vec{u} + \vec{v} - \vec{w},\ \vec{u} - \vec{v},\ 2\vec{v} - \vec{w}\}$ também é linearmente independente.

Q5. Seja $\mathcal{B}$ uma base de V^3 e seja $a \in \mathbb{R}$. Considere as seguintes afirmações sobre os vetores $\vec{u} = (a, 1, 1)_{\mathcal{B}}$, $\vec{v} = (1, a, -a)_{\mathcal{B}}$, $\vec{w} = (1, a, -1)_{\mathcal{B}}$.

I. Se $a \neq -1$, então $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é uma base de V^3.

II. O conjunto $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é linearmente independente para todo $a \in \mathbb{R}$.

III. Se $a \neq 1$, então $\{\vec{u}, \vec{w}\}$ é linearmente independente.

Está correto o que se afirma em

(A) III, apenas.

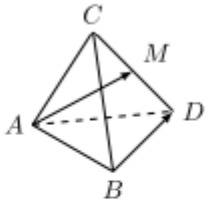
(B) I, apenas.

(C) II e III, apenas.

(D) II, apenas.

(E) I, II e III.

Q6. Considere o tetraedro regular de aresta unitária e vértices A, B, C, D, e seja M o ponto médio do lado CD, conforme a figura.



Se $\alpha \in \mathbb{R}$ é tal que projeção ortogonal do vetor $\overrightarrow{AM}$ sobre o vetor $\overrightarrow{BD}$ é $\alpha\overrightarrow{BD}$, então α é igual a

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{3}{4}$

(C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(D) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

(E) $\frac{1}{4}$

Q7. Considere as seguintes afirmações sobre vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V^3$ satisfazendo $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \|\vec{w}\| = 2$ e $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{u} = 1$.

I. Qualquer elemento de $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ se escreve como combinação linear dos outros dois.

II. Todo vetor de V^3 se escreve como combinação linear de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

III. Todo vetor que é combinação linear de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ tem norma 2.

Está correto o que se afirma em

(A) I, II e III.

(B) I e III, apenas.

(C) II e III, apenas.

(D) III, apenas.

(E) II, apenas.

Q8. O valor de $a \in \mathbb{R}$ para que o sistema

$$\begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ x - y + 3z = -2 \\ x + 3y - az = 8 \end{cases},$$

nas incógnitas x, y, z, tenha infinitas soluções é

(A) 7

(B) 5

(C) 4

(D) 3

(E) 6

Q9. Seja $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ uma base de V^3. Considere as seguintes afirmações:

I. $\{\vec{u} + \vec{x},\ \vec{v} + \vec{x},\ \vec{w} + \vec{x}\}$ é linearmente independente, qualquer que seja $\vec{x} \in V^3$.

II. $\{\vec{u},\ \vec{u} + \vec{v},\ \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}\}$ é linearmente independente.

III. $\{\vec{v} + \vec{w},\ \vec{u} + \vec{w},\ \vec{u} + \vec{v}\}$ é lineramente indepentente.

Está correto apenas o que se afirma em

(A) I.

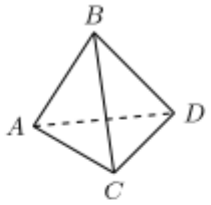
(B) I e II.

(C) I e III.

(D) II e III.

(E) III.

Q10. Considere o tetraedo regular de aresta unitária e vértices A, B, C, D:



O valor de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ é

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) 0

(E) $-\frac{1}{2}$

Q11. Seja $\mathcal{B}$ uma base de V^3 e sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Considere os vetores

$$\vec{u} = (1, 0, 1)_{\mathcal{B}},\ \vec{v} = (b, 1, 1)_{\mathcal{B}},\ \vec{w} = (1, 1, 0)_{\mathcal{B}},\ \vec{z} = (2, a, 2)_{\mathcal{B}}.$$

Sabendo que $\vec{z}$ é combinação linear de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, está correto afirmar que

(A) $a \neq 0$.

(B) $b \neq 2$.

(C) se $b = 2$, então $a = 0$.

(D) $b = 2$ e $a = 0$.

(E) $ab = 0$.

Q12. Seja $\mathcal{B}$ uma base de V^3. Considere os vetores

$$\vec{v_1} = (1,1,0)_{\mathcal{B}}, \quad \vec{v_2} = (0,1,-1)_{\mathcal{B}} \quad \text{e} \quad \vec{v_3} = (2,3,-1)_{\mathcal{B}}.$$

Se $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $2\vec{v_1} + a\vec{v_2} + b\vec{v_3} = \vec{0}$, então ab é igual a

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $-\frac{1}{2}$

(C) $-\frac{1}{3}$

(D) -1

(E) $\frac{1}{4}$

Q13. Seja $\mathcal{B}$ uma base de V^3 e seja $a \in \mathbb{R}$. O intervalo no qual está o número a para que os vetores $\vec{u} = (a, 1, a+1)_{\mathcal{B}}$, $\vec{v} = (1, 2, -a)_{\mathcal{B}}$ e $\vec{w} = (1,1,1)_{\mathcal{B}}$ formem um conjunto linearmente dependente é

(A) $]13, +\infty[$

(B) $]-11, -3]$

(C) $]-\infty, -11]$

(D) $]-3, 5]$

(E) $]5, 13]$

Q14. Sejam A, B, C, D pontos de E^3 que não estão em um mesmo plano e seja M o ponto do segmento CD tal que $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{MD}$. Se α, β, γ são números reais tais que $\overrightarrow{BM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} + \gamma\overrightarrow{AD}$, então o produto $9\alpha\beta\gamma$ vale

(A) -2

(B) 1

(C) -6

(D) -1

(E) 3

Q15. A primeira linha da matriz M que satisfaz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} M = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

é

(A) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

(E) $\begin{bmatrix} -4 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

Q16. Sejam $\vec{u}, \vec{v} \in V^3$ vetores distintos. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**.

(A) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais e têm a mesma norma, então $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{2}\|\vec{u}\|$.

(B) Se $\vec{u} + \vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u} - \vec{v}$, então $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$.

(C) Se $\alpha \in \mathbb{R}$ satisfaz $\alpha\vec{v} = \vec{0}$, então $\alpha = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$.

(D) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são não nulos e $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, então $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é linearmente independente.

(E) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ se, e somente se, $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$.

MAT 3457 – Álgebra Linear 1 para POLI

Prova 1 (2019)

Resolução comentada por *Ricardo S. de Carvalho*

Q.01 Escalonando o sistema linear temos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & 0 & b & 2 \\ a^2 & a^2 & 4 & 4 \\ 0 & a^2 & 2 & b \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} a & 0 & b & 2 \\ 0 & -a^2 & (ab-4) & (2a-4) \\ 0 & a^2 & 2 & b \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} a & 0 & b & 2 \\ 0 & a^2 & (4-ab) & 4-2a \\ 0 & 0 & (ab-2) & 2a+b-4 \end{array}\right]$$

Discussão: SPD: $\begin{cases} ab-2 \neq 0 \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab \neq 2 \\ a \neq 0 \end{cases}$

SPI: $\begin{cases} ab-2=0 \text{ e } a=0 \\ 2a+b-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab=2 \text{ e } a=0 \\ b=4 \end{cases}$

SI: $\begin{cases} a=0 \\ b-4 \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b \neq 2 \end{cases}$

concluímos apenas III está correta. $\boxed{\text{Resposta (A)}}$

Q.02 Dados: $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 2$; $\|\vec{w}\| = 1$; $\theta = \pi/3$

$$\text{proj}_{\vec{u}}(\vec{u}+\vec{v}+2\vec{w}) = \frac{(\vec{u}+\vec{v}+2\vec{w})\cdot(\vec{u})}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\cdot\vec{u} = \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{v}+2\vec{w}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\right)\cdot\vec{u}$$

(i) $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} = 2 \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{u} = 4$

(ii) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos(\pi/3) = 2\cdot 2\cdot\frac{1}{2} = 2$

(iii) $\vec{w}\cdot\vec{u} = \|\vec{w}\|\,\|\vec{u}\|\cdot\cos(\pi/3) = 1\cdot 2\cdot\frac{1}{2} = 1$

assim $\text{proj}_{\vec{u}}(\vec{u}+\vec{v}+2\vec{w}) = \left(\frac{4+2+2(1)}{4}\right)\vec{u} = \boxed{2\vec{u}}$

$\boxed{\text{Resposta (D)}}$

Q.03. De acordo com o enunciado:

$$\vec{u} + 2\vec{v} + 3\vec{w} = a\cdot(\vec{v} - \vec{u}) + b(\vec{v} - \vec{w}) + c\cdot(\vec{u})$$

$$\vec{u} + 2\vec{v} + 3\vec{w} = (-a+c)\cdot\vec{u} + (a+b)\vec{v} + (-b)\cdot\vec{w}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a+c = 1 \\ a+b = 2 \\ -b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow a=5,\ b=-3 \text{ e } c=6$$

logo $a+b+c = 5-3+6 = \boxed{8}$

Resposta (B)

Q.04 Vamos analisar cada alternativa:

(A) Falsa: O vetor $\vec{u}$ não é necessariamente ortogonal a $\vec{v}$.

(B) Falsa: - $\vec{w}$ pode ser igual a $\vec{u}$
- $\vec{w}$ pode ser uma combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$

(C) Falsa: $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$, assim os dois vetores são ortogonais, se e somente se $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$

(D) Verdadeira: $\text{proj}_{\vec{w}}(\vec{u}+\vec{v}) = \dfrac{(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}}{\vec{w}\cdot\vec{w}}\cdot\vec{w} = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}}{\vec{w}\cdot\vec{w}}\cdot\vec{w} = \vec{0}$

como $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ é uma base ortogonal $\vec{u}\cdot\vec{w} = \vec{v}\cdot\vec{w} = 0$

(E) Falsa: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$ (L.D.) logo o conjunto de vetores $\{\vec{u}+\vec{v}-\vec{w},\ \vec{u}-\vec{v},\ 2\vec{v}-\vec{w}\}$ são linearmente dependentes.

Q05 (I) O conjunto de vetores $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ deve ser L.I. para que seja uma base de V^3.

$$\Delta \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -a \\ 1 & a & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow a^3 - a^2 - a + 1 \neq 0 \therefore a \neq \pm 1.$$

Proposição Falsa!

Continuação da Q.05

(II) O conjunto $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é L.I. quando $a \neq 1$ e $a \neq -1$

Se $a = 1$ ou $a = -1$ precisamos verificar.

Para $a = -1$, $\vec{u} = (-1, 1, 1)_B$ e $\vec{v} = (1, -1, 1)_B$ são L.I.

Para $a = 1$, $\vec{u} = (1, 1, 1)_B$ e $\vec{v} = (1, 1, -1)_B$ são L.I.

Concluímos que a proposição é verdadeira!

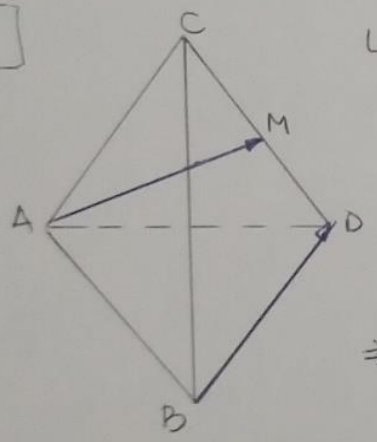
(III) O conjunto $\{\vec{u}, \vec{w}\}$ é L.I. quando $a \neq 1$ e $a \neq -1$

Para $a = -1$, $\vec{u} = (-1, 1, 1)_B$ e $\vec{w} = (1, -1, -1)$ note que são vetores opostos, e portanto são L.D.

Concluímos que a proposição é falsa!

Apenas II é verdadeira, $\boxed{\text{Resposta (D)}}$

$\boxed{\text{Q.06}}$



(i) $\text{proj}_{\vec{BD}} \vec{AM} = \underbrace{\dfrac{\vec{AM} \cdot \vec{BD}}{\vec{BD} \cdot \vec{BD}}}_{\dfrac{\left(\vec{AD} - \frac{1}{2}\vec{CD}\right) \cdot \vec{BD}}{\vec{BD} \cdot \vec{BD}}} \vec{BD} = \alpha \cdot \vec{BD}$

$= \alpha \cdot \vec{BD}$, onde $\vec{BD} \cdot \vec{BD} = 1$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{AD} \cdot \vec{BD} - \frac{1}{2}\vec{CD} \cdot \vec{BD} = \alpha \cdot \vec{BD}} \quad (1)$$

(ii) $\begin{cases} \vec{AD} \cdot \vec{BD} = \|\vec{AD}\| \cdot \|\vec{BD}\| \cdot \cos 60^\circ = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ \vec{CD} \cdot \vec{BD} = \|\vec{CD}\| \cdot \|\vec{BD}\| \cdot \cos 60^\circ = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$ (II)

Substituindo (II) em (I), vem: $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \alpha \cdot \vec{BD} \Rightarrow \alpha \cdot \vec{BD} = \frac{1}{4}$

como $\|\alpha \vec{BD}\| = \|\alpha\| \underbrace{\|\vec{BD}\|}_{1} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{1}{4}}$

$\boxed{\text{Resposta (E)}}$

$\boxed{\text{Q 07}}$ Seja $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}=\vec{0}$, $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ e $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}\in V^3$

temos $\begin{cases}\alpha\,\vec{u}\cdot\vec{u}+\beta\,\vec{v}\cdot\vec{u}+\gamma\,\vec{w}\cdot\vec{u}=0\\ \alpha\,\vec{u}\cdot\vec{v}+\beta\,\vec{v}\cdot\vec{v}+\gamma\,\vec{w}\cdot\vec{v}=0\\ \alpha\,\vec{u}\cdot\vec{w}+\beta\,\vec{v}\cdot\vec{w}+\gamma\,\vec{w}\cdot\vec{w}=0\end{cases}$ onde $\begin{cases}\vec{u}\cdot\vec{u}=\|\vec{u}\|^2\\ \vec{v}\cdot\vec{v}=\|\vec{v}\|^2\\ \vec{w}\cdot\vec{w}=\|\vec{w}\|^2\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}4\alpha+\beta+\gamma=0\\ \alpha+4\beta+\gamma=0\\ \alpha+\beta+4\gamma=0\end{cases}$ $\therefore\ \alpha=\beta=\gamma=0$

concluímos que apenas a (II) está correta. $\boxed{\text{Resposta (E)}}$

$\boxed{\text{Q.08}}$ Escalonando o sistema, temos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&3\\1&-1&3&-2\\1&3&-a&8\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&3\\0&2&-5&5\\0&-2&(a-2)&-5\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&3\\0&2&-5&5\\0&0&(a-7)&0\end{array}\right]$$

Para SPI: $a-7=0$ $\therefore$ $\boxed{a=7}$ $\boxed{\text{Resposta (A)}}$

$\boxed{\text{Q.09}}$ (I) Se o conjunto de vetores $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ é L.I., então todo vetor $\vec{x}\in V^3$ é gerado por $\vec{u},\vec{v}$ e $\vec{w}$. Isso quer dizer que para todo $\vec{x}\in V^3$, existem α,β e $\gamma\in\mathbb{R}$ tais que: $\vec{x}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}$

assim o conjunto de vetores $\{\vec{u}+\vec{x},\vec{v}+\vec{x},\vec{w}+\vec{x}\}$ é L.D.

Portanto, proposição <u>falsa</u>!

(II) $\{\vec{u},\ \vec{u}+\vec{v},\ \vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\}$:

$\Delta=\begin{vmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{vmatrix}=1\neq 0$ assim o conjunto de vetores é L.I.

Proposição <u>verdadeira</u>!

(III) $\{\vec{v}+\vec{w}, \vec{u}+\vec{w}, \vec{u}+\vec{v}\}$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \quad \therefore \text{ O conjunto de vetores é L.I.}$$

proposição verdadeira!

Concluímos que apenas a (II) e (III) são verdadeiras!

$\boxed{\text{Resposta (D)}}$

$\boxed{\text{Q. 10}}$ De acordo com o enunciado:

$$\begin{aligned}
\vec{AB}\cdot\vec{CD} &= \vec{AB}\cdot(\vec{DA}+\vec{AC}) \\
&= \vec{AB}\cdot(-\vec{AD}+\vec{AC}) \\
&= \vec{AB}\cdot\vec{AC} - \vec{AB}\cdot\vec{AD} \\
&= \|\vec{AB}\|\|\vec{AC}\|\cos 60^\circ - \|\vec{AB}\|\|\vec{AD}\|\cos 60^\circ \\
&= 1\cdot 1\cdot \frac{1}{2} - 1\cdot 1\cdot \frac{1}{2} \\
&= \boxed{0}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Resposta: (D)}}$

2ª Resolução: Pela figura dada note que os pontos A e B são equidistantes de C e D. Portanto, a reta $\overline{AB}$ é ortogonal a $\overline{CD}$ $\Rightarrow$ $\vec{AB}\cdot\vec{CD} = 0$ $(AB \perp CD)$

$\boxed{\text{Q. 11}}$ O vetor $\vec{z}$ é combinação linear de $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$, portanto:

$$(2, a, 2) = x\cdot(1,0,1) + y(b,1,1) + z(1,1,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + by + z = 2 \\ y + z = a \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Escalonando o sistema, temos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & b-1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & (2-b) & (1-b)a \end{array}\right]$$

Se $b=2$, então $(1-2)\cdot a = 0 \Rightarrow a = 0$, mas $b \neq 1$

$\boxed{\text{Resposta (C)}}$

Q.12 De acordo com o enunciado:

$$2(1,1,0) + a(0,1,-1) + b(2,3,-1) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} a+3b+2=0 \\ 2b+2=0 \\ -a-b=0 \end{cases} \Rightarrow a=1 \text{ e } b=-1, \text{ logo } \boxed{a \cdot b = -1}$$

Resposta (D)

Q.13 A condição suficiente para que o conjunto de vetores seja L.D é que seu $\Delta = 0$.

assim, $\begin{vmatrix} a & 1 & a+1 \\ 1 & 2 & -a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a^2 - 2 = 0 \therefore \boxed{a = \pm\sqrt{2}}$

Resposta (D)

Q.14 De acordo com o enunciado:

$$\begin{cases} \vec{CM} = -\vec{AC} + \vec{AM} \\ \vec{MD} = -\vec{AM} + \vec{AD} \end{cases} \Leftrightarrow \vec{CM} = 2\vec{MD}, \text{ temos: } \vec{AM} = \frac{1}{3}(\vec{AC} + 2\vec{AD})$$

onde $\vec{BM} = -\vec{AB} + \vec{AM} = -\vec{AB} + \frac{1}{3}(\vec{AC} + 2\vec{AD})$

ou seja, $\alpha = -1$; $\beta = \frac{1}{3}$ e $\gamma = \frac{2}{3}$

Pede-se $9 \cdot \alpha\beta\gamma = 9 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \boxed{-2}$

Resposta (A)

Q15 Primeiro devemos obter a matriz inversa (M^{-1}) de $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

através do método: $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$

assim: $M^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

assim: $M = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2}$

concluímos: $M = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & -4 \end{bmatrix}$, logo a 1ª linha é $(4\ 3\ 3)$

$\boxed{\text{Resposta (B)}}$

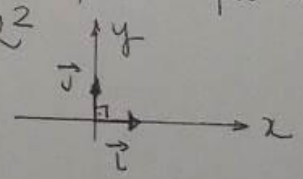
Q16 (A) verdadeira: podemos provar através de Pitágoras.

(B) verdadeira: $0 = (\vec{u}+\vec{v}) \cdot (\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \therefore \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$

(C) Verdadeira: propriedade do produto escalar, com escalar nulo ou vetor nulo.

(D) Verdadeira: propriedades das famílias ortogonais de vetores não nulos.

(E) falsa: Dois vetores podem ser ortogonais sem serem necessariamente nulos, exemplo são os versores $\vec{i}$ e $\vec{j}$ de $\mathbb{R}^2$



Concluímos $\boxed{\text{Resposta: (E)}}$